ZAGADNIENIA DO EGZAMINU DYPLOMOWEGO

DLA STUDENTÓW KIERUNKU MATEMATYKA STOSOWANA I STOPNIA

kończących studia w roku akademickim 2026/2027

CZĘŚĆ PIERWSZA: PYTANIA Z PRZEDMIOTÓW KIERUNKOWYCH

(*ZAGADNIENIA Z CZĘŚCI PIERWSZEJ OBOWIĄZUJĄ WSZYSTKICH DYPLOMANTÓW*)

1. **Granica ciągu i granica funkcji. Własności funkcji ciągłych.**
2. **Pochodna funkcji jednej zmiennej oraz jej zastosowania.**
3. **Pochodne cząstkowe i ekstrema funkcji wielu zmiennych.**
4. **Szeregi liczbowe i funkcyjne.**
5. **Całka funkcji jednej zmiennej.**
6. **Całka funkcji wielu zmiennych.**
7. **Całki krzywoliniowe.**
8. **Całki powierzchniowe.**
9. **Relacje równoważności i ich przykłady w różnych działach matematyki** (podać definicje: relacji, relacji równoważności, klasy równoważności, zbioru ilorazowego. Należy podać intuicje stojące za tymi pojęciami i zilustrować je na wybranym przykładzie. Należy umieć podać zastosowania pojęcia zbioru ilorazowego w matematyce, na przykład: kierunek w geometrii, pojęcie wektora swobodnego, pojęcie grupy ilorazowej i innych struktur ilorazowych z algebry).
10. **Układy równań liniowych** (*metody rozwiązywania, twierdzenie Cramera, twierdzenie Kroneckera-Cappeliego*).
11. **Przestrzenie wektorowe** (*definicja, przykłady, podstawowe własności*).
12. **Odwzorowania liniowe** (*definicja, przykłady, podstawowe własności*).
13. **Rachunek macierzowy i wyznaczniki** (*w tym metody odwracania macierzy, definicja i podstawowe własności wyznacznika, wzór Laplace'a, operacje elementarne na wierszach i kolumnach*).
14. **Liczby zespolone** *(działania, płaszczyzna zespolona, postaci trygonometryczna i wykładnicza, wzór de Moivre'a, pierwiastkowanie, zasadnicze twierdzenia algebry*).
15. **Proste i płaszczyzny w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.**

16. **Grupy** (*pojęcia: grupa, podgrupa, podgrupa normalna, grupa ilorazowa, homomorfizm grup; grupy permutacji, rozkłady na cykle, pojecie grupy cyklicznej, twierdzenia dotyczące grup cyklicznych*).

17. **Pierścienie** (*pojęcie pierścienia, rodzaje pierścieni, pojęcie homomorfizmu pierścieni, charakterystyka, dzielniki zera, elementy odwrotne, przykłady*).

18. **Największy wspólny dzielnik i największa wspólna wielokrotność w arytmetyce liczb całkowitych** (*definicje, przykłady, Algorytm Euklidesa, rozszerzony algorytm Euklidesa***)**.

19. **Arytmetyka modularna** (*kongruencje, funkcja arytmetyczna Eulera, definicja elementu pierwotnego modulo n, definicja logarytmu dyskretnego, własności, przykłady, zastosowania, twierdzenie Eulera*).

20. **Liczby pierwsze** (d*efinicja, własności, twierdzenie Euklidesa o liczbach pierwszych, sito Eratostenesa, znane twierdzenia dotyczące rozmieszczenia liczb pierwszych w tym twierdzenie opisujące asymptotyczny rozkład liczb pierwszych, postulat Bertranda*).

21. **Przestrzeń probabilistyczna jako model zjawiska losowego** (d*efinicja przestrzeni probabilistycznej, przykłady: prawdopodobieństwo klasyczne, geometryczne, schemat Bernoullego*)**.**

22. **Dyskretne i ciągłe rozkłady prawdopodobieństwa** (*definicja zmiennej losowej, rozkładu prawdopodobieństwa, związek między tymi pojęciami. Rozkład dyskretny – definicja, przykłady: dwumianowy, geometryczny, Poissona. Rozkład absolutnie ciągły – definicja, przykłady: jednostajny, wykładniczy, normalny. Dystrybuanta i jej związek z rozkładem*)**.**

23. **Prawa wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne** (*słabe prawo wielkich liczb, Mocne PWL, nierówności Czebyszewa, tw. Moivre'a – Laplace'a, Lindeberga-Levy'ego, znaczenie CTG w statystyce matematycznej*).

24. **Zależność zdarzeń, prawdopodobieństwo warunkowe, warunkowa wartość oczekiwana** (*definicja **n** zdarzeń niezależnych, def. prawdopodobieństwa warunkowego, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa, aksjomatyczna def. WWO, własności*).

25. **Model matematyczny i jego weryfikacja. Ilustracja na przykładzie** *(modele przyrostu populacji - model Malthusa, dyskretne równanie logistyczne, model Verhulsta).*

26. **Podstawowe pojęcia i wzory kombinatoryki. Przykłady zastosowań** (*permutacje, wariacje z/bez powtórzeń, kombinacje. Umieszczanie n przedmiotów w k kategoriach, po n_1,…, n_k przedmiotów w każdej kategorii). Należy zdefiniować te pojęcia i powiązać je z innymi pojęciami matematycznymi – np. z funkcjami o określonych własnościach i przedstawić alternatywny problem zliczania redukujący się do każdego z tych pojęć. Należy umieć przedstawić i uzasadnić wzór na zliczanie wszystkich obiektów danego typu***).***

27. **Modelowanie w epidemiologii** (*modele SI (zdrowy/podatny – zarażony), SIS (zdrowy/podatny – zarażony - zdrowy), SIR (zdrowy/podatny – zarażony - uodporniony), SEIR (zdrowy/podatny – wystawiony na działanie – zarażony - uodporniony)*).

28. **Praktyczne zastosowania grafów** (*zaprezentować problem praktyczny, który da się przełożyć na język grafów. Omówić zagadnienie teoretyczne modelujące podany problem praktyczny; podać algorytm (-y) służący(-e) do jego rozwiązania; omówić cechy tego algorytmu (Czy jest*

dokładny, jego czas działania w zależności od rozmiaru grafu). Możliwe zagadnienia do wyboru:

a) *Znajdowanie **najkrótszej drogi** od punktu A do punktu B, gdy dane są odległości do i między punktami pośrednimi. Algorytm Dijkstry lub inny o złożoności wielomianowej.*

b) *Zagadnienie modelowane jako **problem najkrótszych połączeń**: wyznaczanie minimalnego drzewa spinającego w grafie spójnym z wagami. Algorytmy Prima i Kruskala, o złożoności wielomianowej.*

c) *Zagadnienie modelowane jako **problem komiwojażera**: znajdowanie cyklu Hamiltona w grafie pełnym z wagami. Dokładny algorytm „siłowy" nie ma złożoności wielomianowej. Algorytmy przybliżone: najbliższego sąsiada i najtańszego łącza mają wielomianową złożoność, ale na ogół nie dają dokładnej odpowiedzi. Przypuszcza się, że nie istnieje żaden algorytm dający, w czasie wielomianowym, dokładną odpowiedź.)*

29. **Podać metody opisu struktury zbiorowości** (*miary położenia, dyspersji, asymetrii, koncentracji oraz współzależności zjawisk (współczynniki korelacji)*)**.**

30. **Omówić funkcję regresji liniowej oraz ocenę zgodności oszacowanej funkcji regresji z danymi empirycznymi.**

31. **Opisać metody analizy dynamiki zjawisk** (*metody wyodrębniania trendów - mechaniczne i analityczne*)**.**

32. **Szacowanie wartości nieznanych parametrów rozkładu** (*estymacja*).

33. **Sprawdzanie poprawności przypuszczeń na temat rozkładu** (*weryfikacja hipotez statystycznych*).

34. **Modelowanie zjawisk z użyciem równań różniczkowych (***równania różniczkowe rzędu pierwszego i drugiego, typy równań, zagadnienie początkowe, model Malthusa, model Verhulsta, prawo stygnięcia, inne***).**

35. **Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach w modelach matematycznych** *(układ liniowy jednorodny o stałych współczynnikach, układ niejednorodny, związek z równaniami skalarnymi, model Lotki-Volterry, model mieszania się roztworów soli, inne).*

36. **Równania różnicowe i ich zastosowanie** *(operator różnicowania i sumowania, równania liniowe jednorodne i niejednorodne rzędu n, model odnowienia zbiorowości środków trwałych, równanie logistyczne, dyskretny model Malthusa i Verhulsta, model pajęczynowy, inne).*

37. **Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji przy zastosowaniu metod numerycznych** (*metoda bisekcji i metoda regula falsi*).

38. **Interpolacja wielomianowa (***twierdzenie o jedyności wielomianu interpolacyjnego. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a***).**

CZĘŚĆ DRUGA. PYTANIA Z PRZEDMIOTÓW SPECJALNOŚCIOWYCH, WEDŁUG SPECJALNOŚCI

SPECJALNOŚĆ MFIE

1. **Skończony dyskretny model rynku finansowego** *(przedstawić model, Omówić strategie inwestycyjne, przedstawić pojęcie arbitrażu oraz rynku bez arbitrażu.).*

2. **Instrumenty pochodne w finansach** (omówić działanie, wycenę, zastosowania; podać przykłady: kontrakty forward, futures, kontrakty wymiany: FRA, swaps, egzotyczne instrumenty pochodne, opcje europejskie).

3. **Martyngałowa wycena instrumentów pochodnych** *(podać definicję martyngału, równoważnej miary martyngałowej, omówić martyngałową wycenę instrumentów pochodnych, podstawowe twierdzenie matematyki finansowej, rynki zupełne i niezupełne.***).**

4. **Dwumianowy model wyceny instrumentów pochodnych** (*omówić model dwumianowy, podać wzór na cenę europejskiej opcji kupna w modelu dwumianowym*.).

5. **Stopy procentowe. Instrumenty dłużne. Wycena obligacji, miary wrażliwości cen: duration, convexity.**

6. **Stacjonarność kowariancyjna i przykłady transformacji stacjonaryzujących.**

7. **Filtry liniowe i ich zastosowania.**

8. **Omówić model probabilistyczny obecnej wartości świadczenia z polisy terminowej n-letniej na życie dla x-latka, jeśli świadczenie wypłacane jest na koniec roku śmierci** (*podać wzór na jednorazową składkę netto za taką polisę. Jak ten wzór powstaje?*).

9. **Omówić model probabilistyczny obecnej wartości renty bezterminowej płatnej z góry dla x-latka** (*podać wzór na jednorazową składkę netto za taką rentę. Jak ten wzór powstaje?*).

10. **Zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji** *(podać i omówić definicję funkcji użyteczności i przedstawić zadanie).*

11. **Zadanie maksymalizacji dochodu producenta w warunkach długookresowej strategii rozwoju** (*podać i omówić definicję funkcji produkcji, a następnie przedstawić zadanie).*

12. **Zadanie minimalizacji kosztów przedsiębiorstwa** *(podać definicję funkcji kosztów przedsiębiorstwa, przestawić zadanie i omówić różnicę między zadaniem minimalizacji kosztów w warunkach długookresowej i krótkookresowej strategii rozwoju).*

13. **Równowaga rynkowej w modelu Arrowa- Hurwicza.**

14. **Analiza finansowa** *(podać definicję analizy finansowej, przedstawić cele, funkcje oraz podstawowe zasady jej sporządzania, wymienić rodzaje analizy finansowej (kryterium przedmiotowe, podmiotowe, czasowe, szczegółowości opracowania) oraz krótko omówić wybraną analizę (analiza pionowa, analiza pozioma, analiza wskaźnikowa)).*

15. **System bankowy w Polsce** *(podać definicję systemu bankowego, modele {anglosaski, niemiecko-japoński nazywany też kontynentalnym) oraz funkcje jakie pełni w gospodarce. Omówić strukturę systemu bankowego w Polsce i rolę Banku Centralnego (NBP), nadzór nad systemem bankowym – znaczenie i instytucje (KNF, BFG)).*

16. **Sprawozdanie finansowe** *(podać definicję sprawozdania finansowego, przestawić cele, terminy oraz podstawowe zasady jego sporządzania, krótko omówić poszczególne dokumenty wchodzące w skład sprawozdania finansowego (bilans, rachunek zysków i strat, rachunek przepływów pieniężnych, informacja dodatkowa, zestawienie zmian w kapitale własnym)).*

17. **Konto księgowe jako urządzenie służące do ewidencji zdarzeń i operacji gospodarczych w rachunkowości** *(podać definicję konta księgowego, funkcjonowanie konta w ciągu roku obrotowego, zasada podwójnego zapisu, rodzaje kont księgowych oraz sposoby ich działania (konto aktywne, pasywne, aktywno-pasywne, konta wynikowe – kosztów, przychodów, konta syntetyczne i analityczne)).*

18. **Amortyzacja środków trwałych** *(podać definicję amortyzacji, rodzaje, metody obliczania oraz przestawić jej wpływ na sprawozdanie finansowe i wynik finansowy przedsiębiorstwa).*

19. **Podstawowy model zysku przedsiębiorstwa** (*przedstawić model, omówić konsekwencje deprecjacji kursu walutowego, zmiany stopy procentowej na rynku wewnętrznym i zewnętrznym, określić warunki, przy których deprecjacja może być niekorzystna dla przedsiębiorstwa).*

20. ***Ograniczenie budżetowe państwa*** **(***definicja, oczekiwane korzyści od zaciągania długu publicznego oraz potencjalne ryzyko, sposoby zmniejszenia długu publicznego, relacja „dług/PKB"***)**.

21. **Krzywa Phillipsa (***definicja, warianty krzywej Phillipsa, dyskusja co do przyczyn przyspieszenia inflacji w latach 2021-2023***).**

SPECJALNOŚĆ AD

1. **Uogólnione macierze odwrotne w sensie Moore'a-Penrose'a (***definicja, podstawowe własności i zastosowania***).**
2. **Twierdzenie Gerszgorina i jego zastosowania.**
3. **Ortogonalizacja Grama-Schmidta i rozkład QR.**
4. **Logika rozmyta (***własności oraz zastosowanie***).**
5. **Algorytmy genetyczne (***schemat działania oraz zastosowania*).
6. **Sieci neuronowe (***budowa i działanie. Algorytm wstecznej propagacji błędu. Zastosowania*.).
7. **Omówić dwa wybrane algorytmy sortowania i porównać ich złożoność** (*omówić, na czym polega zagadnienie sortowania i przedstawić dwa algorytmy sortowania. Zilustrować ich działanie na przykładzie. Porównać złożoność*).
8. **Interpolacja wielomianowa** *(interpolacja funkcjami sklejanymi - splajnami).*
9. **Metody regresji** (*liniowej, nieliniowej, logistycznej*; *przykład problemu, wyróżnienie zmiennej objaśnianej i zmiennych objaśniających, założenia modelu, ocena modelu*).
10. **Przedziały ufności (***definicja, przykłady, założenia, przedziały ufności stosowane w praktyce, metoda O'Briena-Fleminga*).

11. **Metody wizualizacji danych (***histogram, wykres słupkowy, wykres pudełkowy, wykres rozproszenia, mapa R elementów*).

12. **Testy statystyczne** (*typy testów: t-test, ANOVA, test chi-kwadrat niezależności i substytuty, założenia, przykłady, testy stosowane przez praktyków, błędy i korekty na wielokrotne testowanie*).

13. **Analiza danych - zderzenie teorii z praktyką (***wytyczne dla statystyków: EMA, FDA, komitet paryski, relaksacja założeń testów - kiedy możliwa i jak? problemy praktyków: wielokrotne testowanie, analiza mocy testu, automatyzacja pracy*).
14. **Regresja i analiza wariancji - zderzenie teorii z praktyką (***wytyczne dla statystyków: EMA, FDA, komitet paryski, relaksacja założeń testów - kiedy możliwa i jak? problemy praktyków: postać modelu, pozorna regresja, wielokrotne testowanie, analiza mocy testu, automatyzacja pracy*).

15. **Co to jest przeuczenie (overfitting) w uczeniu maszynowym i jakie są sposoby zapobiegania temu zjawisku.**

16. **Jaka jest różnica między parametrami modelu a hiperparametrami. Podaj przykłady parametrów i hiperparametrów dla sztucznych sieci neuronowych.**

17. **Czym się różni uczenie nadzorowane od uczenie nienadzorowanego?**

18. **Omówić, po co stosuje się dostrajanie (tuning) i walidację krzyżową przy generacji modelu w uczeniu maszynowym.**

19. **Czym jest wersjonowanie tabel?**

20. **Czym jest partycjonowanie tabel?**

21. **Czym jest transakcja bazodanowa?**

CZĘŚĆ TRZECIA. PYTANIA Z PRZEDMIOTÓW WYBIERALNYCH

PRZEDMIOT WYBIERALNY 1: **Teoria optymalizacji** (OBYDWIE SPECJALNOŚCI).

Metody programowania matematycznego.

PRZEDMIOT WYBIERALNY 2: (*osoba zdająca egzamin podaje, który z poniższych trzech przedmiotów były przez nią wybrane*)

- **Przedmiot: Matematyka w grafice komputerowej** (OBYDWIE SPECJALNOŚCI).

  System Funkcji Iterowanych (*co to są Systemy Funkcji Iterowanych; pojęcie odwzorowania zwężającego (kontrakcji) w przestrzeni metrycznej zupełnej; metryka Hausdorffa; twierdzenie Banacha o punkcie stałym; fraktale jako niepuste zbiory zwarte w przestrzeniach euklidesowych*).

- **Przedmiot: Kodowanie algebraiczne** (OBYDWIE SPECJALNOŚCI).

  Kody, entropia, kody liniowe i cykliczne (definicja alfabetu, słowa, kodu, entropii, Twierdzenie Krafta-McMillana, podstawowe twierdzenie Shannona o bezszumowym kodowaniu dyskretnym, kody liniowe, metryka Hamminga, wykrywanie i korygowanie błędów, kody dualne, macierzowy opis kodów liniowych, kodowanie i dekodowanie za pomocą kodów liniowych. wielomianowy i macierzowy opis kodów cyklicznych, kodowanie i dekodowanie kodów cyklicznych).

- **Przedmiot: Teoria informacji** (SPECJALNOŚCI Analityka Danych i Matematyka z Informatyką).

  Pojęcie entropii i kodowanie Huffmana.

PRZEDMIOT WYBIERALNY 3: (*osoba zdająca egzamin podaje, który z poniższych trzech przedmiotów były przez nią wybrane*)

- **Przedmiot: Teoria węzłów** (OBYDWIE SPECJALNOŚCI)

  Węzły i problem rozróżniania węzłów *(topologiczna definicja węzła, rzut i diagram węzła, elementarne deformacje węzła, równoważność węzłów, ruchy Reidemeistera. kolorowanie, indeks zaczepienia, niezmienniki wielomianowe, twierdzenie Alexandera.).*

- **Przedmiot: Podstawy kryptografii i kryptologii** (OBYDWIE SPECJALNOŚCI)

  Kryptosystemy *(definicja i znaczenie kryptosystemów, szyfrowanie symetryczne i asymetryczne, szyfrogram, tekst jawny, klucz; proste przykłady takie jak szyfr przestawieniowy, afiniczny, Hilla, permutacyjny, strumieniowy; kryptosystemy klucza publicznego, funkcje skrótu, poziom bezpieczeństwa, modele ataków kryptograficznych, tajności doskonałej, teoria Shannona, entropia, entropia na literę, redundancja języka, fałszywe klucze, długość krytyczna kryptosystemu).*

- **Przedmiot: Teoria podejmowania decyzji** (TYLKO SPECJALNOŚĆ MFIE)

  Zastosowanie programowania liniowego w teorii podejmowania decyzji.

- **Przedmiot: Wstęp do matematyki kwantowo-obliczeniowej** (SPECJALNOŚCI Analityka Danych i Matematyka z Informatyką).

  Algorytmy kwantowo-obliczeniowe (algorytmy: Shor'a, Deutsch'a, Deutscha-Joszy oraz Growera, ich baza logiczna. Kwantowa transformacja Fourier'a, odwzorowanie kanoniczne tensorowe, reprezentacja w postaci bramek Hadamarda.)